

## Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală 14.02.2026 Giurgiu

Clasa a VII a

Toate subiectele sunt obligatorii

Se acordă 10 puncte din oficiu

Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

Scrieți rezolvările complete

Barem de evaluare și notare

Nr.	Evaluare	Notare
1.	$S = x + \frac{1y - 1}{9} + x + \frac{2y - 2}{9} + x + \frac{3y - 3}{9} + \dots + x + \frac{9y - 9}{9}$ $S = 9x + \frac{1y - 1}{9} + \frac{2y - 2}{9} + \frac{3y - 3}{9} + \dots + \frac{9y - 9}{9}$ $S = 9x + \frac{1}{90} [(10 + 20 + 30 + \dots + 90) - (1 + 2 + 3 + \dots + 9) - 9y]$ $S = 9x + \frac{1}{90} \cdot \left( 10 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - \frac{9 \cdot 10}{2} + 9y \right)$ $= 9x + \frac{1}{90} \cdot \left( 9 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 9y \right) = 9x + \frac{9}{2} + \frac{y}{10}$ $S = \frac{90x + 45 + y}{10}$ $a = \sqrt{2S} = \sqrt{2 \cdot \frac{90x + 45 + y}{10}} = \sqrt{\frac{90x + 45 + y}{5}} = \sqrt{18x + 9 + \frac{y}{5}}$ <p>Pentru a număr natural, <math>\frac{y}{5} \in \mathbb{N} \Rightarrow y = 5</math></p> $a = \sqrt{18x + 9 + 1} = \sqrt{18x + 10} = \sqrt{2 \cdot (9x + 5)}$ $9x + 5 = 2k^2, x \in \{1; 2; \dots; 9\}$ $x = 3 \Rightarrow 2 \cdot (9x + 5) = 64$ $x = 5 \Rightarrow 2 \cdot (9x + 5) = 100$ $(x, y) = \{(3, 5); (5, 5)\}$	2 p  2 p  2 p  2 p  2 p  1,5p  2 p  1 p  1 p 3 p 1 p 1 p 2 p
2.	$\frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+x}{x+1} =$ $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{x \cdot (x+1)}{2 \cdot (x+1)} =$ $1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x}{2} =$ $\frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot (x+1)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2 + x - 2}{4}$ $\frac{x^2 + x - 2}{4} = \frac{x + 2023}{4} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = x + 2023 \Leftrightarrow$	7 p  3 p  6,5 p  3 p

	$x^2 = 2025, x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $x = \sqrt{2025} = 45$	3 p
3.	Realizarea construcției conform datelor din problemă Unghiurile $\angle ACB$ și $\angle CBE$ au măsurile de $45^\circ \Rightarrow$ dreptele $AC$ și $BE$ sunt paralele. Fie $EF \perp AC$ , atunci $EF = BO = \frac{BD}{2}$ Triunghiul $FAE$ este dreptunghic în $F$ și are unghiul $\angle FAE = 30^\circ$ . Deducem că $AE = 2EF = BD$ .	5 p 5 p 2 p  5 p 3 p 2,5 p
4.	Realizarea desenului corespunzător datelor din problemă Ducem înălțimea $AD \perp BC$ , $AD$ mediană $\Rightarrow BD \equiv DC$ $BE = 5AE \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{5}{6} \left. \vphantom{\frac{BE}{AB} = \frac{5}{6}} \right\} \Rightarrow$ $BC = 2BD \Rightarrow BP/BD = \frac{5}{6}$ $EP \parallel AD$ (R.T.Thales), dar $AD \perp BC \Rightarrow EP \perp BC$	5 p 5 p  7,5 p  5 p